Volume d'hypersurfaces algébriques réelles aléatoires

Thomas Letendre (LMO)
avec M. Ancona et M. Puchol

Orsay – 12 mai 2022

Hypersurfaces aléatoires

(M, g) variété riemannienne compacte sans bord, $\dim(M) = n$.

$f : M \to \mathbb{R}$ champ gaussien, centré, lisse et non-dégénéré.

$Z = f^{-1}(0) \subset M$ est presque surement une hypersurface lisse.

Intérêts du modèle

- géométrie aléatoire plongée,
- marche en toute dimension $n \geqslant 1$,
- topologie et géométrie riches et non déterministes.

Préliminaire : vecteurs gaussiens

$(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euclidien de dimension N,

$\Lambda : V \to V$ opérateur auto-adjoint défini-positif.

Définition (vecteur gaussien centré de variance Λ)

$X \in V$ vecteur aléatoire dont la loi admet la densité :

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}\sqrt{\det(\Lambda)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \Lambda^{-1}x, x\rangle\right)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $X \sim \mathcal{N}(0, \Lambda)$.

Une gaussienne standard est $X \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$.

Dans une base orthonormée $(e_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$, on a $X \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$ si et seulement si $X = \sum a_i e_i$, où les $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant N}$ sont des v.a.i.i.d. $\mathcal{N}(0, 1)$.

Champs gaussiens

Définition (Champ gaussien centré sur M)

$f : M \to \mathbb{R}$ fonction aléatoire telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_N \in M$, $(f(x_1), \ldots, f(x_N))$ est un vecteur gaussien centré.

- f est lisse si ses réalisations sont $\mathcal{C}^\infty$ presque surement.
- f est non-dégénéré si $\mathrm{Var}(f(x)) > 0$ pour tout $x \in M$.

Champs gaussiens

Définition (Champ gaussien centré sur M)

$f : M \to \mathbb{R}$ fonction aléatoire telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x_1, \ldots, x_N \in M$, $(f(x_1), \ldots, f(x_N))$ est un vecteur gaussien centré.

- f est lisse si ses réalisations sont $\mathcal{C}^\infty$ presque surement.
- f est non-dégénéré si $\mathrm{Var}(f(x)) > 0$ pour tout $x \in M$.

f est caractérisé par sa fonction de corrélation $e : (x, y) \mapsto \mathbb{E}[f(x)f(y)]$. Donne aussi les corrélations entre les dérivées de f :

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta e(x, y) = \mathbb{E}\left[\partial^\alpha f(x) \partial^\beta f(y)\right].$$

Champs gaussiens

Définition (Champ gaussien centré sur M)

$f : M \to \mathbb{R}$ fonction aléatoire telle que pour tout $N \in \mathbb{N}$ et $x_1, \dots, x_N \in M$, $(f(x_1), \dots, f(x_N))$ est un vecteur gaussien centré.

- f est lisse si ses réalisations sont $\mathcal{C}^\infty$ presque surement.
- f est non-dégénéré si $\mathrm{Var}(f(x)) > 0$ pour tout $x \in M$.

f est caractérisé par sa fonction de corrélation $e : (x, y) \mapsto \mathbb{E}[f(x)f(y)]$.
Donne aussi les corrélations entre les dérivées de f :

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta e(x, y) = \mathbb{E}\left[\partial^\alpha f(x) \partial^\beta f(y)\right].$$

Lemme

Si f est un champ gaussien centré non-dégénéré, alors $Z = f^{-1}(0) \subset M$ est presque surement une hypersurface lisse (éventuellement vide).

Polynômes de Kostlan

Polynômes de Kostlan

Polynôme de Kostlan de degré d en $n+1$ variables

$$f_d = \sum_{\alpha_0+\dots+\alpha_n=d} a_{\alpha_0,\dots,\alpha_n} \sqrt{\frac{d!}{\alpha_0!\dots\alpha_n!}} X_0^{\alpha_0}\dots X_n^{\alpha_n},$$

où les $(a_{\alpha_0,\dots,\alpha_n})_{\alpha_0+\dots+\alpha_n=d}$ sont des v.a.i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$.

f_d est une gaussienne standard dans $\mathbb{R}_d^{\mathrm{hom}}[X]$, pour le produit scalaire :

$$\langle P, Q\rangle = \int_{\mathbb{C}^{n+1}} P(z)\overline{Q(z)}e^{-\|z\|^2}\,\mathrm{d}z.$$

C'est l'unique vecteur gaussien dans $\mathbb{R}_d^{\mathrm{hom}}[X]$ tel que :

- les monômes sont orthogonaux ;
- pour tout $O \in O_{n+1}(\mathbb{R})$, on a l'égalité en loi $f_d \circ O = f_d$.

Modèle de Kostlan

On s'intéresse à $Z_d = f_d^{-1}(0) \subset \mathbb{RP}^n$, avec f_d polynôme de Kostlan.

Théorème (Kostlan, 1993)

Pour tout $d \geqslant 1$, on a : $\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_d)] = \sqrt{d}\,\mathrm{Vol}\big(\mathbb{RP}^{n-1}\big)$.

Modèle de Kostlan

On s'intéresse à $Z_d = f_d^{-1}(0) \subset \mathbb{RP}^n$, avec f_d polynôme de Kostlan.

Théorème (Kostlan, 1993)

Pour tout $d \geqslant 1$, on a : $\mathbb{E}[\mathrm{Vol}(Z_d)] = \sqrt{d}\,\mathrm{Vol}\big(\mathbb{RP}^{n-1}\big)$.

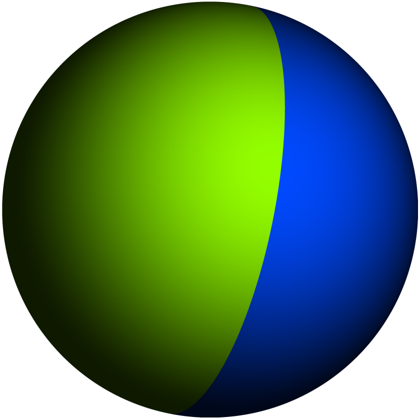
Z_d définit une mesure de Radon aléatoire par :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{RP}^n), \qquad \langle Z_d, \phi \rangle = \int_{x \in Z_d} \phi(x)\, \mathrm{d}V_{Z_d}.$$

Exemple

- Pour $\phi = 1$, $\langle Z_d, \phi \rangle = \mathrm{Vol}(Z_d)$.
- Pour $n = 1$, Z_d est fini p.s. et la mesure aléatoire associée est $\displaystyle\sum_{x \in Z_d} \delta_x$.

Courbes aléatoires de degré d dans le modèle de Kostlan



$d = \quad 1$

Images par Vincent Beffara.

Courbes aléatoires de degré d dans le modèle de Kostlan

$d = \quad 2$

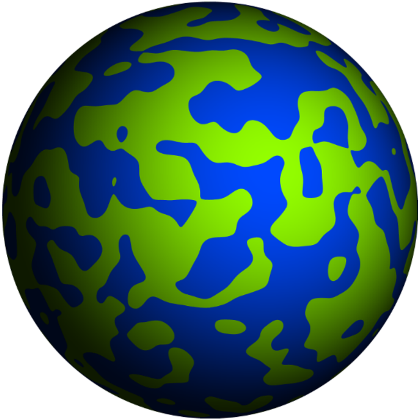
Images par Vincent Beffara.

Courbes aléatoires de degré d dans le modèle de Kostlan

$d = \quad 5$

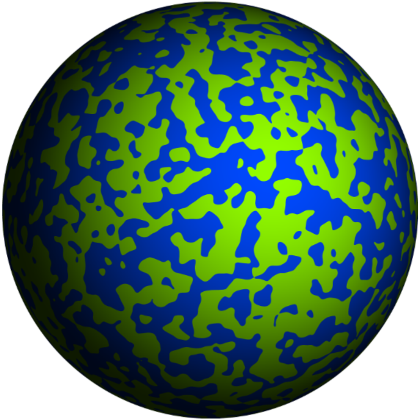
Images par Vincent Beffara.

Courbes aléatoires de degré d dans le modèle de Kostlan



$d = \quad 200$
Images par Vincent Beffara.

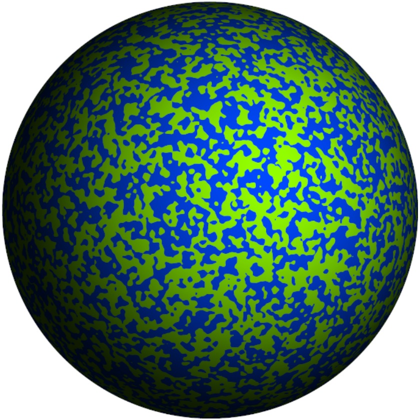
Courbes aléatoires de degré d dans le modèle de Kostlan



$d = 1000$

Images par Vincent Beffara.

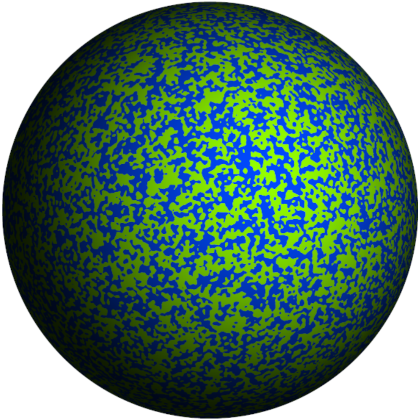
Courbes aléatoires de degré d dans le modèle de Kostlan



$d = 5000$

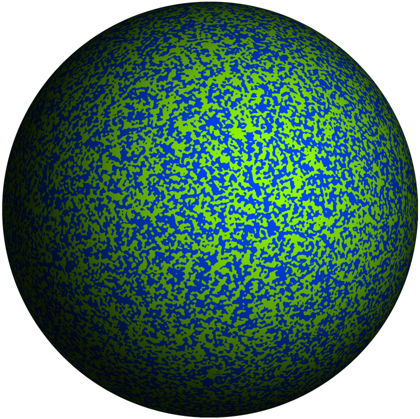
Images par Vincent Beffara.

Courbes aléatoires de degré d dans le modèle de Kostlan



$d = 10000$
Images par Vincent Beffara.

Courbes aléatoires de degré d dans le modèle de Kostlan



$d = 20000$
Images par Vincent Beffara.

Modèle de Fubini–Study complexe

Espace ambiant, lieu complexe

X variété projective complexe, $\dim_{\mathbb{C}}(X) = n$	$\mathbb{CP}^n$
$(L, h) \to X$ fibré en droites hermitien positif	$\mathcal{O}(1) \to \mathbb{CP}^n$
ω forme de Kähler associée à (L, h)	forme de Fubini–Study
g métrique riemannienne définie par ω	métrique euclidienne

Espace ambiant, lieu complexe

X variété projective complexe, $\dim_{\mathbb{C}}(X) = n$	$\mathbb{CP}^n$
$(L, h) \to X$ fibré en droites hermitien positif	$\mathcal{O}(1) \to \mathbb{CP}^n$
ω forme de Kähler associée à (L, h)	forme de Fubini–Study
g métrique riemannienne définie par ω	métrique euclidienne
$(L^d, h^d) \to X$ pour $d \in \mathbb{N}^*$	$\mathcal{O}(d) \to \mathbb{CP}^n$
$H^0(L^d)$ section holomorphes de $L^d \to X$	$\mathbb{C}_d^{\mathrm{hom}}[X_0, \dots, X_n]$
$\langle s, t \rangle = \int_X h^d(s(x), t(x)) \,\mathrm{d}V_X$	$\int_{\mathbb{C}^{n+1}} P(z)\overline{Q(z)} e^{-\Vert z \Vert^2} \,\mathrm{d}z$

Espace ambiant, lieu réel

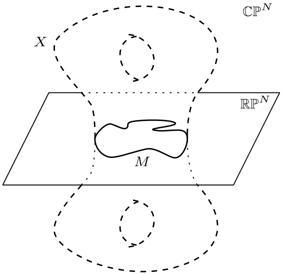
c_X involution antiholomorphe sur X — conjugaison

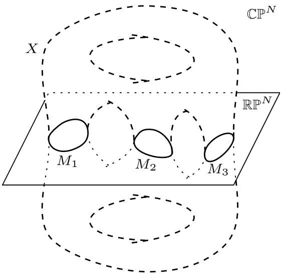
c_L idem sur L, compatible avec c_X et h — conjugaison

$\mathbb{R}H^0(L^d) = \left\{ s \in H^0(L^d) \;\middle|\; c_{L^d} \circ s = s \circ c_X \right\}$ — $\mathbb{R}_d^{\mathrm{hom}}[X_0, \dots, X_n]$

$M = \mathrm{Fix}(c_X)$ le lieu réel de X — $\mathbb{RP}^n$

On suppose $M \neq \emptyset$, alors M est lisse, compacte, sans bord, de dimension n.





Sections aléatoires

Modèle de Fubini–Study complexe (Gayet–Welschinger, 2011)

$s_d \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$ section aléatoire dans $\left(\mathbb{R}H^0(L^d), \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$.

s_d définit un champ gaussien lisse centré non-dégénéré sur M.

$Z_d = s_d^{-1}(0) \cap M$ est p.s. une hypersurface lisse de M.

Z_d peut de nouveau être vu comme une mesure aléatoire sur M :

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^0(M), \qquad \langle Z_d, \phi \rangle = \int_{x \in Z_d} \phi(x) \, \mathrm{d}V_{Z_d},$$

où $\mathrm{d}V_{Z_d}$ est la mesure de volume sur Z_d induite par g.

Asymptotiques des moments du volume

Espérance

$Z_d = s_d^{-1}(0) \cap M$ dans le modèle de Fubini–Study complexe, $\dim(M) = n$.

Théorème (L., 2016)

Soit $C_n = \frac{\mathrm{Vol}\left(\mathbb{RP}^{n-1}\right)}{\mathrm{Vol}(\mathbb{RP}^n)}$*, pour tout* $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$*, on a :*

$$\mathbb{E}[\langle Z_d, \phi\rangle] = \sqrt{d}\, C_n \left(\int_M \phi \,\mathrm{d}V_M\right) + \|\phi\|_\infty O\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right).$$

Corollaire (Équidistribution en moyenne)

En tant que formes linéaire continues sur $(\mathcal{C}^0(M), \|\cdot\|_\infty)$,

$$\frac{1}{\sqrt{d}}\mathbb{E}[Z_d] \xrightarrow[d \to +\infty]{} C_n \,\mathrm{d}V_M.$$

Moments centrés

Théorème (L.–Puchol, 2019)

Il existe $\sigma_n > 0$ (indépendante de M) telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathrm{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) = d^{1-\frac{n}{2}} \sigma_n^2 \left(\int_M \phi^2 \,\mathrm{d}V_M \right) + o\left(d^{1-\frac{n}{2}}\right).$$

Théorème (Ancona–L., 2021)

En dimension $n = 1$, pour tout $p \geqslant 3$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathbb{E}\left[\left(\langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle]\right)^p\right] = \mathbb{E}\left[\mathcal{N}(0,1)^p\right] \mathrm{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle)^{\frac{p}{2}} + o(d^{\frac{p}{4}}).$$

Moments centrés

Théorème (L.–Puchol, 2019)

Il existe $\sigma_n > 0$ (indépendante de M) telle que, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\operatorname{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle) = d^{1-\frac{n}{2}} \sigma_n^2 \left(\int_M \phi^2 \, \mathrm{d}V_M \right) + o\left(d^{1-\frac{n}{2}}\right).$$

Théorème (Ancona–L., 2021)

En dimension $n = 1$, pour tout $p \geqslant 3$, pour tout $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathbb{E}\left[\left(\langle Z_d, \phi \rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi \rangle]\right)^p\right] = \mathbb{E}\left[\mathcal{N}(0,1)^p\right] \operatorname{Var}(\langle Z_d, \phi \rangle)^{\frac{p}{2}} + o(d^{\frac{p}{4}}).$$

Conjecture

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, même formule en remplaçant $\frac{p}{4}$ par $\frac{p}{2}\left(1 - \frac{n}{2}\right)$ dans l'erreur.

Équidistribution presque sûre et fluctuations

Loi des grands nombres (L.–Puchol, 2019 ; Ancona–L., 2021)

Si $n \neq 2$ alors, presque surement, $\frac{1}{\sqrt{d}} Z_d \xrightarrow[d \to +\infty]{\text{faible}-*} C_n \, \mathrm{d}V_M$:

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^0(M), \qquad \frac{1}{\sqrt{d}} \langle Z_d, \phi \rangle \xrightarrow[d \to +\infty]{} C_n \int_M \phi \, \mathrm{d}V_M.$$

Théorème central limite (Ancona–L., 2021)

Si $n = 1$ alors $\frac{1}{d^{\frac{1}{4}} \sigma_1} \left(Z_d - \sqrt{d} C_1 \, \mathrm{d}V_M \right) \xrightarrow[d \to +\infty]{\text{loi dans } \mathcal{D}'(M)}$ bruit blanc gaussien,
i.e. pour tout $\phi \in \mathcal{C}^\infty(M)$,

$$\frac{1}{d^{\frac{1}{4}} \sigma_1} \left(\langle Z_d, \phi \rangle - \sqrt{d} C_1 \int_M \phi \, \mathrm{d}V_M \right) \xrightarrow[d \to +\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}\left(0, \|\phi\|_2^2\right).$$

Éléments de preuves

Équidistribution presque sûre

Soient $p \geqslant 1$ et $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$:

$$\mathbb{E}\left[\sum_{d\geqslant 1}\left(\frac{\langle Z_d,\phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d,\phi\rangle]}{\sqrt{d}}\right)^{2p}\right] = \sum_{d\geqslant 1}\frac{\mathbb{E}\left[\left(\langle Z_d,\phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d,\phi\rangle]\right)^{2p}\right]}{d^p}.$$

D'après les asymptotiques de moments, c'est sommable si

- $n \geqslant 3$ et $p = 1$,
- $n = 1$ et $p \geqslant 3$.

Dans ces deux cas, on a p.s. $\dfrac{\langle Z_d,\phi\rangle}{\sqrt{d}} \sim \dfrac{\mathbb{E}[\langle Z_d,\phi\rangle]}{\sqrt{d}} \xrightarrow[d\to+\infty]{} C_n \displaystyle\int_M \phi \,\mathrm{d}V_M$.

On conclut en utilisant la séparabilité de $(\mathcal{C}^0(M), \|\cdot\|_\infty)$.

Variété d'incidence et non-dégénérescence

On définit

$$\mathbb{R}H^0(L^d) \xleftarrow{\pi_1} \Sigma = \left\{ (s,x) \in \mathbb{R}H^0(L^d) \times M \;\middle|\; s(x) = 0 \right\} \xrightarrow{\pi_2} M$$

et $F : (s,x) \mapsto s(x)$.

$$\begin{aligned} \partial_1 F(s,x) = \mathrm{ev}_x \text{ est surjective } &\iff \mathrm{ev}_x \neq 0 \\ &\iff \mathrm{ev}_x(s_d) = s_d(x) \text{ non-dégénérée} \\ &\iff \mathrm{Var}(s_d(x)) > 0. \end{aligned}$$

s_d non-dégénéré, donc F submersion et Σ hypersurface lisse.

Variété d'incidence et non-dégénérescence

On définit

$$\mathbb{R}H^0(L^d) \xleftarrow{\pi_1} \Sigma = \left\{(s,x) \in \mathbb{R}H^0(L^d) \times M \;\middle|\; s(x) = 0\right\} \xrightarrow{\pi_2} M$$

et $F : (s,x) \mapsto s(x)$.

$$\begin{aligned} \partial_1 F(s,x) = \mathrm{ev}_x \text{ est surjective } &\iff \mathrm{ev}_x \neq 0 \\ &\iff \mathrm{ev}_x(s_d) = s_d(x) \text{ non-dégénérée} \\ &\iff \mathrm{Var}(s_d(x)) > 0. \end{aligned}$$

s_d non-dégénéré, donc F submersion et Σ hypersurface lisse.

Les valeurs critiques de π_1 sont les s ne s'annulant pas transversalement.

Par Sard, s_d s'annule transversalement presque surement.

Calcul du volume moyen

Formule de Kac–Rice pour l'espérance

$$\mathbb{E}\left[\int_{Z_d} \phi \, \mathrm{d}V_{Z_d}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in M} \phi(x) \frac{\mathbb{E}\left[\|\nabla_x s_d\| \,\middle|\, s_d(x) = 0\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}(s_d(x))}} \, \mathrm{d}V_M.$$

$$\mathbb{R}H^0(L^d) \xleftarrow{\pi_1} \left\{(s,x) \in \mathbb{R}H^0(L^d) \times M \,\middle|\, s(x) = 0\right\} \xrightarrow{\pi_2} M$$

Calcul du volume moyen

Formule de Kac–Rice pour l'espérance

$$\mathbb{E}\left[\int_{Z_d} \phi \, \mathrm{d}V_{Z_d}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x \in M} \phi(x) \frac{\mathbb{E}\left[\|\nabla_x s_d\| \,\middle|\, s_d(x) = 0\right]}{\sqrt{\mathrm{Var}(s_d(x))}} \, \mathrm{d}V_M.$$

$$\mathbb{R}H^0(L^d) \xleftarrow{\pi_1} \left\{(s,x) \in \mathbb{R}H^0(L^d) \times M \,\middle|\, s(x) = 0\right\} \xrightarrow{\pi_2} M$$

On note $e_d : (x,y) \mapsto \mathbb{E}[s_d(x)s_d(y)]$ la fonction de corrélation de s_d.

$\big(s_d(x), \nabla_x s_d\big)$ est gaussien centré, de variance :

$$\begin{pmatrix} e_d(x,x) & \partial_{y_j} e_d(x,x) \\ \partial_{x_i} e_d(x,x) & \partial_{x_i}\partial_{y_j} e_d(x,x) \end{pmatrix}_{1 \leqslant i,j \leqslant n}.$$

La densité ne dépend que de e_d et de ses premières dérivées en (x,x).

Formule de Kac–Rice pour les moments

Pour $p \geqslant 2$ et $\phi \in \mathcal{C}^0(M)$,

$$\mathbb{E}\left[\left(\langle Z_d, \phi\rangle - \mathbb{E}[\langle Z_d, \phi\rangle]\right)^p\right] = \int_{M^p} \left(\prod_{i=1}^{p} \phi(x_i)\right) D_d^p(x_1, \dots, x_p) \, \mathrm{d}V_M^p.$$

- $D_d^p(x_1, \dots, x_p)$ ne dépend que des premières dérivées de e_d en (x_i, x_j).
- D_d^p singulière sur la diagonale $\left\{(x_1, \dots, x_p) \in M^p \;\middle|\; \exists i \neq j, x_i = x_j\right\}$.

Fonction de corrélation

Pour f_d polynôme de Kostlan de degré d en $(n+1)$-variables :

$$e_d(x,y) = \mathbb{E}[f_d(x)f_d(y)] = \cos(\varrho(x,y))^d,$$

où ϱ est la distance géodésique dans $\mathbb{RP}^n$.

Fonction de corrélation

Pour f_d polynôme de Kostlan de degré d en $(n+1)$-variables :

$$e_d(x,y) = \mathbb{E}[f_d(x)f_d(y)] = \cos(\varrho(x,y))^d,$$

où ϱ est la distance géodésique dans $\mathbb{RP}^n$.

Dans le modèle de Fubini–Study complexe, la fonction de corrélation e_d de s_d est le noyau de Bergman du fibré $L^d \to X$.

Estimation pour le noyau de Bergman (Ma–Marinescu)

$$e_d\left(\exp_x\left(\frac{w}{\sqrt{d}}\right), \exp_x\left(\frac{z}{\sqrt{d}}\right)\right) \simeq e^{-\frac{1}{2}\|z-w\|^2}.$$

Fait apparaitre une limite d'échelle à l'échelle $\frac{1}{\sqrt{d}}$, indépendante de x et M.

Topologie des hypersurfaces algébriques (aléatoires)

Le 16ème problème de Hilbert

Pour $P \in \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, X_1, X_2]$ générique, $P^{-1}(0)$ est un nombre fini d'ovales.

Théorème (Harnack, 1876)

$P^{-1}(0)$ a au plus $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1$ composantes connexes.

16ème problème de Hilbert (1900)

Quels nombres d'ovales peut-on réaliser par un polynôme de degré d ?
Comment ces ovales sont-ils nichés les uns dans les autres ?

Réponse complète connue seulement pour $d \leqslant 8$.

Le 16ème problème de Hilbert

Pour $P \in \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, X_1, X_2]$ générique, $P^{-1}(0)$ est un nombre fini d'ovales.

Théorème (Harnack, 1876)

$P^{-1}(0)$ a au plus $\frac{1}{2}(d-1)(d-2)+1$ composantes connexes.

16ème problème de Hilbert (1900)

Quels nombres d'ovales peut-on réaliser par un polynôme de degré d ?
Comment ces ovales sont-ils nichés les uns dans les autres ?

Réponse complète connue seulement pour $d \leqslant 8$.

Bornes déterministes sur la topologie (Thom, 1965)

Soit $i \leqslant n-1$, il existe $B_{i,n} > 0$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}_d^{\text{hom}}[X_0, \ldots, X_n]$ générique : $b_i(P^{-1}(0)) \leqslant B_{i,n} d^n$.

Topologie des hypersurfaces aléatoires

Théorème (Gayet–Welschinger, 2015)

Dans le modèle Fubini–Study complexe, il existe $0 < a_{i,n} \leqslant A_{i,n}$ *telles que :*

$$a_{i,n} \leqslant \liminf_{d \to +\infty} \frac{\mathbb{E}[b_i(Z_d)]}{d^{\frac{n}{2}} \operatorname{Vol}(M)} \leqslant \limsup_{d \to +\infty} \frac{\mathbb{E}[b_i(Z_d)]}{d^{\frac{n}{2}} \operatorname{Vol}(M)} \leqslant A_{i,n}$$

Topologie des hypersurfaces aléatoires

Théorème (Gayet–Welschinger, 2015)

Dans le modèle Fubini–Study complexe, il existe $0 < a_{i,n} \leqslant A_{i,n}$ telles que :

$$a_{i,n} \leqslant \liminf_{d\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[b_i(Z_d)]}{d^{\frac{n}{2}}\operatorname{Vol}(M)} \leqslant \limsup_{d\to+\infty} \frac{\mathbb{E}[b_i(Z_d)]}{d^{\frac{n}{2}}\operatorname{Vol}(M)} \leqslant A_{i,n}$$

Soit $m : M \to \mathbb{R}$ fonction de Morse, presque surement $m_{|Z_d}$ est de Morse.

Pour $i \leqslant n-1$, on note $m_i(Z_d) = \operatorname{Card}\left\{x \in \operatorname{crit}(m_{|Z_d}) \;\middle|\; \operatorname{ind}(x) = i\right\}$.

Théorème (Gayet–Welschinger, 2015)

Il existe $A_{n,i} > 0$ tel que $\mathbb{E}[m_i(Z_d)] \sim d^{\frac{n}{2}} A_{n,i} \operatorname{Vol}(M)$.

Donne la borne supérieure via les inégalités de Morse : $b_i(Z_d) \leqslant m_i(Z_d)$.

En cours, avec Martin Puchol

Conjecture

Il existe $\sigma_{n,i} > 0$ tel que $\mathrm{Var}(m_i(Z_d)) \sim d^{\frac{n}{2}} \sigma_{n,i} \mathrm{Vol}(M)$.

Si $\mathrm{Var}(m_i(Z_d)) = O(d^{\frac{n}{2}})$ on a les corollaires suivants.

- Pour tout $\varepsilon > 0$, $$\mathbb{P}\left(\frac{b_i(Z_d)}{d^{\frac{n}{2}} \mathrm{Vol}(M)} \geqslant A_{n,i} + \varepsilon\right) = O(d^{-\frac{n}{2}}).$$
- Si $n \geqslant 3$, presque surement $$\limsup_{d \to +\infty} \frac{b_i(Z_d)}{d^{\frac{n}{2}} \mathrm{Vol}(M)} \leqslant A_{n,i}.$$

Image locale à échelle $\frac{1}{\sqrt{d}}$

On peut supposer que $m : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_n$.

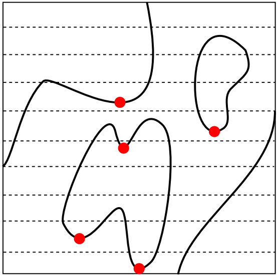


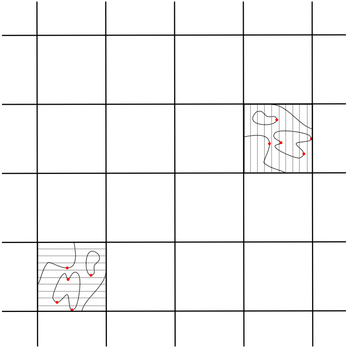
Image locale à l'échelle $\frac{1}{\sqrt{d}}$, loin de crit(m).

Le nombre de minima locaux de $m_{|Z_d}$ dans une boite de taille $\frac{1}{\sqrt{d}}$ converge en distribution vers une variable aléatoire N universelle.

Heuristique dans le cas des minima locaux

On découpe M en $k \simeq d^{\frac{n}{2}} \operatorname{Vol}(M)$ boites disjointes de taille $\frac{1}{\sqrt{d}}$.

N_j nombre de minima de $m_{|Z_d}$ dans la j-ième boite, donc $m_0(Z_d) = \sum_{j=1}^{k} N_j$.

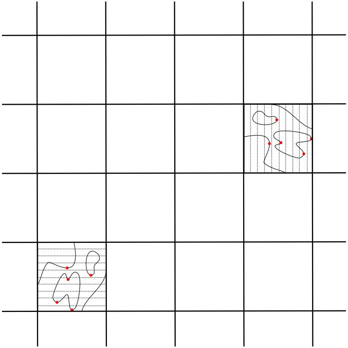


On remplace $(N_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$ par des variables indépendantes distribuées comme N.

Heuristique dans le cas des minima locaux

On découpe M en $k \simeq d^{\frac{n}{2}} \operatorname{Vol}(M)$ boites disjointes de taille $\frac{1}{\sqrt{d}}$.

N_j nombre de minima de $m_{|Z_d}$ dans la j-ième boite, donc $m_0(Z_d) = \sum_{j=1}^{k} N_j$.

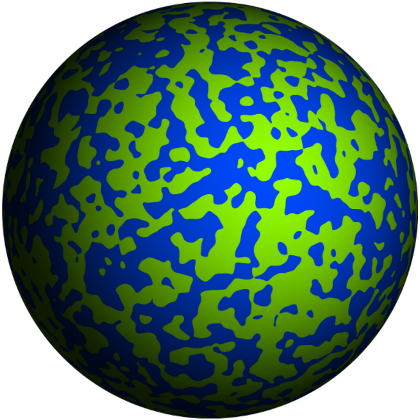


On remplace $(N_j)_{1 \leqslant j \leqslant k}$ par des variables indépendantes distribuées comme N.

$$\mathbb{E}[m_0(Z_d)] = \sum \mathbb{E}[N_j] \simeq d^{\frac{n}{2}} \operatorname{Vol}(M)\mathbb{E}[N].$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}(m_0(Z_d)) &\simeq \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Var}(N_j) \\ &\simeq d^{\frac{n}{2}} \operatorname{Vol}(M) \operatorname{Var}(N). \end{aligned}$$

Merci de votre attention



Courbe algébrique aléatoire de degré $d = 1000$ dans $\mathbb{RP}^2$.

Image par Vincent Beffara.